誤差伝播の真実

誤差伝播の法則は測量でも証明できるのか？

HPから解説を引用してみた様々な解説を見ても基本的には
$m^2 = m1^2 + m2^2 + \cdots\cdot$（mは標準偏差）

（数学的に導かれた公式となっている専門書に限らずWEBサイトでも同じ）

２０１２／３／２１

http://www.kinomise.com/sokuryo/sokgaku/gosa.html

標準偏差（誤差）の累積には、「誤差伝播（推移）の法則」と言うものが用いられる。

誤差伝播の法則はやや難しくなるが、次のように証明する事ができる。

例えば、テープを中継ぎして2点間の距離を観測する場合を考える。このとき、観測された距離には、テープを中継ぎするときの誤差が影響する。つまり、テープを中継ぎするときの正確さによってその2点間の観測精度は左右される事になる。

しかし、テープを1回使用して観測する場合の標準偏差（誤差）は既知であるため、これらを連続させた場合の（これらの関数であるところの未知量）結果には、どのように影響を与えるかを、数学的表現でまとめたものが、「誤差の伝播（または拡散）」と呼ばれるものである。

いま、2点間（1〜2）をそれぞれ独立した数量、x1、x2で観測した場合、これらの値から、未知量Xを求めるとすると、

X ＝ X1+X2 として表される。この標準偏差をそれぞれm、m1とm2とすると、

m²＝[（xの観測値の誤差）²] ／nとなる。

また、x1の観測の誤差を、⊿1’、⊿1”、⊿1’’’、…・。X2の観測値の誤差を、⊿2’、⊿2”、⊿2’’’…・とし、X1、X2の標準偏差をそれぞれ、m1、m2とすれば、その大きさは、

M1²＝[⊿1²]／n 、 m2²＝[⊿2²]／n 、………となる。

よって、両辺を2乗してそれぞれ加えれば、

（X’ の誤差）²＝⊿1’²±2⊿1’⊿2’＋⊿2’²

（X’’ の誤差）²＝⊿1’’²±2⊿1’’⊿2’’＋⊿2’’²………

となり、これを全て加えると、

[（X の誤差）²]＝[⊿1²]±2[⊿1⊿2]＋[⊿2²]

となる。ここで、

⊿1’＋⊿1’’＋⊿1’’’＋……＝０

⊿2’＋⊿2’’＋⊿2’’’＋……＝０

※ ⊿1、⊿2は誤差であるため、正であったり負の数であったりする、このため[⊿1⊿2]＝０であると考えられる。

∴[（X の誤差）²]＝[⊿1²]＋[⊿2²]

したがって、$m^2 = m1^2 + m2^2$ となる。

つまり、観測が複数に及ぶ場合の標準偏差は、足し算ではなく、誤差（標準偏差）伝播の法則に乗っ取って、展開される。

http://uyokyokusetsu.way-nifty.com/blog/2008/02/post_64a7.html

平均二乗誤差を標準偏差と置き換えて読む

誤差は伝播する

測量では、実際に測定した値から次の値を計算で求める、というケースが多い。

たとえば、A点→B点とB点→C点の距離を測定し、足し算でA点→C点の距離を求める場合など。

このとき、計算結果に対する誤差はどうなるか？

測定値のそれぞれには誤差があり、これらの誤差は当然のごとく計算結果にも伝播する。

測量結果は常に誤差とセットで考えてゆく必要があるため、こうした計算値に対しても誤差を求めなければならず、その方法も用意されている。

先のケースで観測値x1、x2を足して値Xを求める場合、

X＝x1＋x2

それぞれの観測値に対する平均二乗誤差をm1、m2とすると、Xに対する平均二乗誤差mは次の式で求められる。

$m^2 = m1^2 + m2^2$

以上、2個の解説を示したがMは標準偏差とする、2個めでは平均二乗誤差としているが平均二乗誤差は統計上の指標ではないため標準偏差＝平均二乗誤差であることの証明が必要になるが残念ながら証明は出来ない。

ここで考えなければならないのは果たして　$m^2 = m1^2 + m2^2$　が角度と測距の混合測量に置いてこの数式が成り立つのであろうか？という疑問である。

なぜこのような疑問に至ったか、それは筆界に於ける誤差楕円は円に近いほど測量精度が高いと仮定したときに期待し誤差楕円が得られない、具体的には潰れた楕円になっていることがありこれを誤差の伝播の法則では説明が難しいことにある。

ここでその検証をしてみる。

測距重量1：測角重量1の誤差伝播

概ね次の重量を想定出来る

測距誤差(TS＝A)

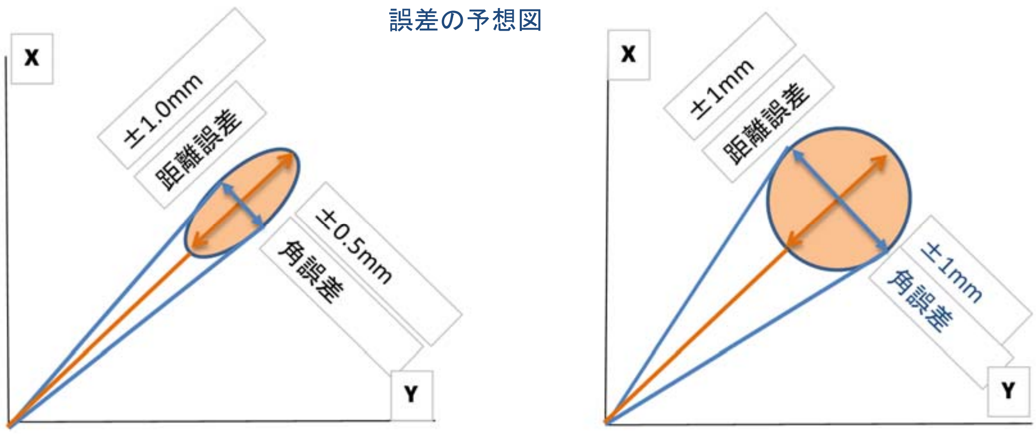
±（3mm＋3＊10^{-6}＊D）が主流として測角誤差5秒読定の性能で正反、一対回の最大誤差を7.1秒（√(5^2＋5^2)）とすれば測距重量1、測角の重量2　とできる。

測距誤差(TS=B)

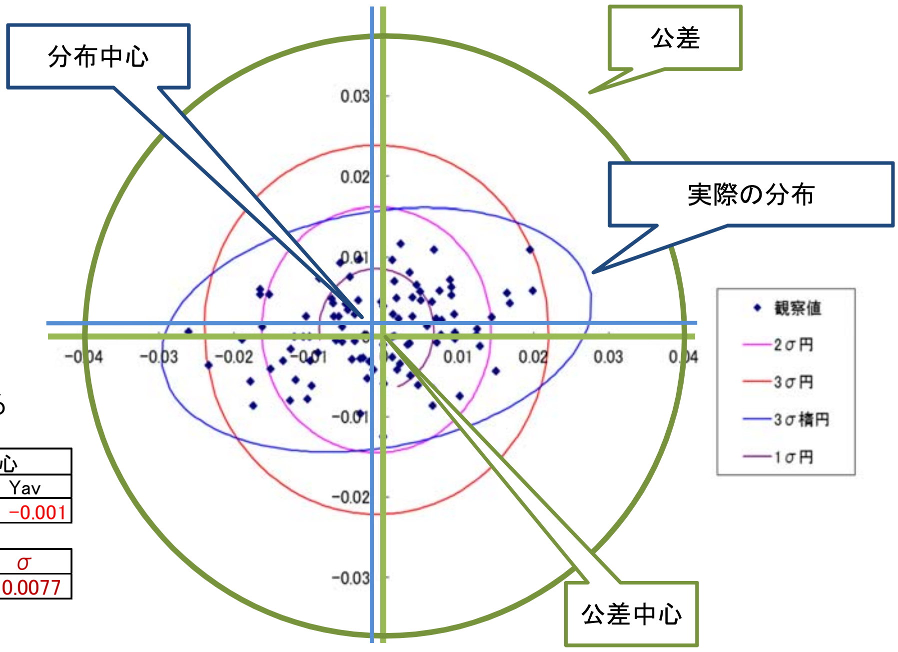
±（3mm＋3＊10^{-6}＊D）が主流として測角誤差10秒読定の性能で正反、一対回の最大誤差を14秒（√(10^2＋10^2)）とすれば測距重量1、測角の重量1　とできる。

A　　　　　　B

誤差の予想図



二変量（座標値X･Y）の分布と確率・不良率



必要なデータは計算される

σm	σn	分布中心	
0.0097	0.0043	Xav	Yav
σx	σy	0.001	−0.001
0.0051	0.0096		
相関係数	カウント	楕円角度	σ
0.590	99	81	0.0077

詳細は「公差と不良率」をご覧下さい　m(_ _)m

誤差伝播検証（開放トラバーで）　その1

3通りのトラバー型を用意して計算しました、誤差の伝わり方がトラバー測量では一般の場合と異なり「誤差伝播の法則」証明できません。

このことに関しては次のスライドで簡単に説明してみました。

使ったデータはランダムに発生させた99個のデータを正規化しています、1路線のトラバーを99回繰り返し測量したことが前提です。

誤差伝播の真実

誤差伝播の法則は測距と測角の混合測量では証明できない。

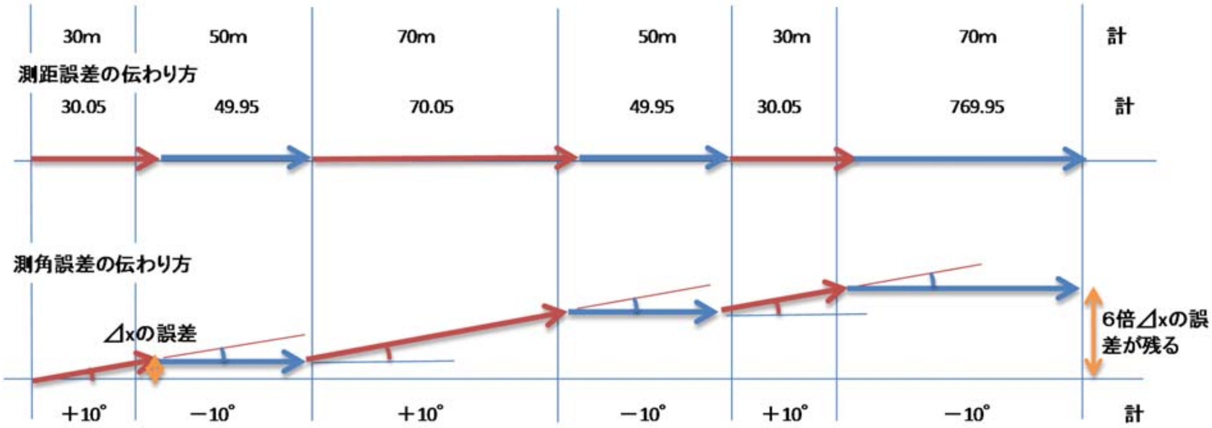
次の図で説明すれば

測距の誤差は点間距離に影響されずに誤差の法則に従って⊿yが＋と－に同程度の量が交互に表れると終点では±０となる。

その結果　±（０＋my）　の誤差が生じる。

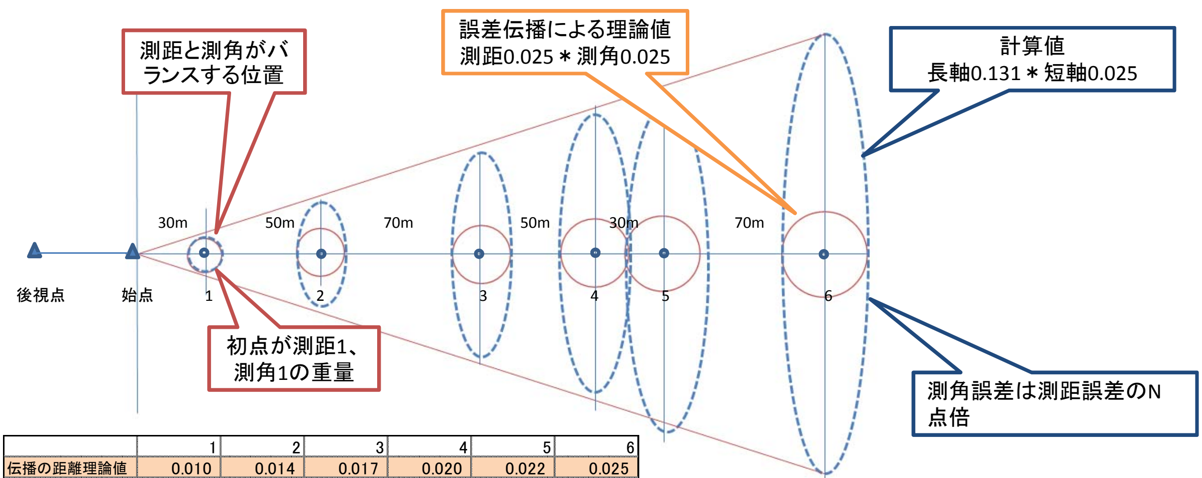
測角の誤差も同様に考えると、各点毎に⊿xが生じるが角誤差がマイナスになっても方向からマイナスされるので０の位置に戻らない。角の誤差が＋、－と交互に表れても終点では新点数n×⊿x倍が計算誤差として残る。

これは前点の方向角に観測点の測角を加えて方向角を求め、その方向角から⊿xを計算する方式の為に計算上は避けられない。その結果　±（（n×⊿x）＋（mx））　の誤差が生じる。



①　誤差の値　直線（測距10mm・測角20secの重量）

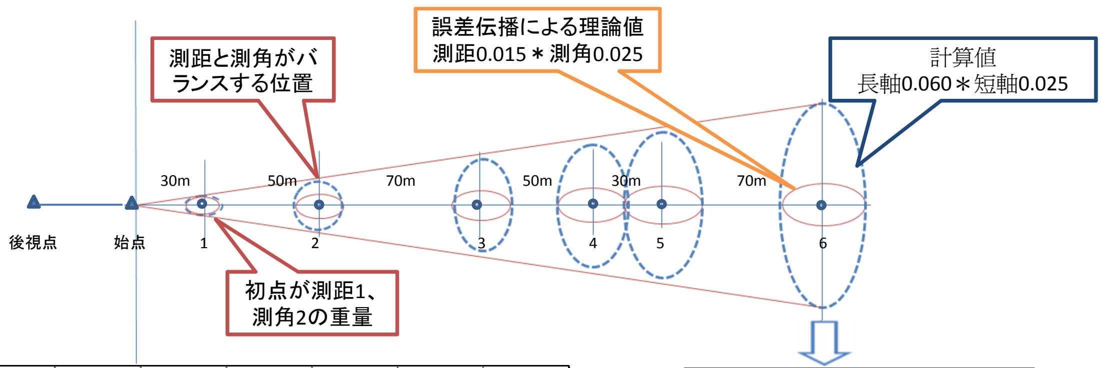
直線的なトラバーを仮定して



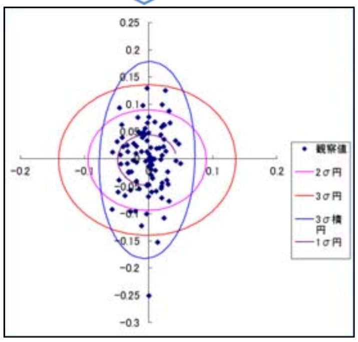
	1	2	3	4	5	6
伝播の距離理論値	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
伝播の角理論値	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
伝播のσxy	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
長軸	0.010	0.030	0.059	0.080	0.094	0.131
短軸	0.009	0.013	0.017	0.021	0.024	0.025
計算σxy	0.010	0.023	0.043	0.059	0.068	0.094
楕円角　（度）	146	173	178	178	178	179
相関係数（ρ）	0.124	0.663	0.849	0.873	0.880	0.931
⊿x	0.000	−0.001	−0.004	−0.008	−0.009	−0.012
⊿y	−0.001	−0.001	−0.001	−0.003	−0.003	−0.002
不良率(%)0.040	0.034	38.973	81.391	89.844	92.567	96.889

② 誤差の値 直線（測距10mm・測角10secの重量）

直線的なトラバーを仮定して

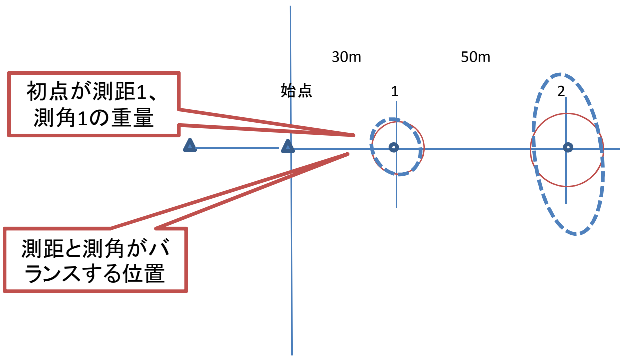


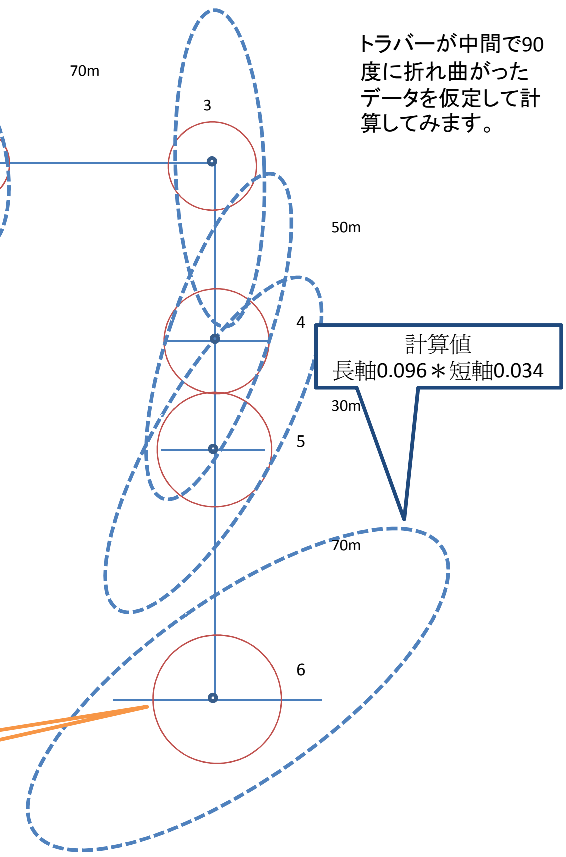
	1	2	3	4	5	6
伝播の距離理論値	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
伝播の角理論値	0.005	0.007	0.009	0.010	0.011	0.015
伝播のσxy	0.008	0.011	0.014	0.016	0.017	0.021
長軸	0.010	0.014	0.027	0.036	0.043	0.060
短軸	0.004	0.013	0.017	0.021	0.024	0.025
計算σxy	0.008	0.014	0.023	0.030	0.035	0.046
楕円角（度）	81	40	2	4	2	1
相関係数(ρ)	0.590	0.075	0.447	0.501	0.521	0.709
⊿x	0.001	0.001	0.002	0.002	0.001	−0.002
⊿y	−0.001	−0.001	−0.001	−0.003	−0.003	−0.002
不良率(%) 0.040	0.098	1.771	27.724	48.020	58.195	77.718



③ 誤差の値 直線＋90度曲がり（測距10mm・測角20secの重量）

トラバーが中間で90度に折れ曲がったデータを仮定して計算してみます。

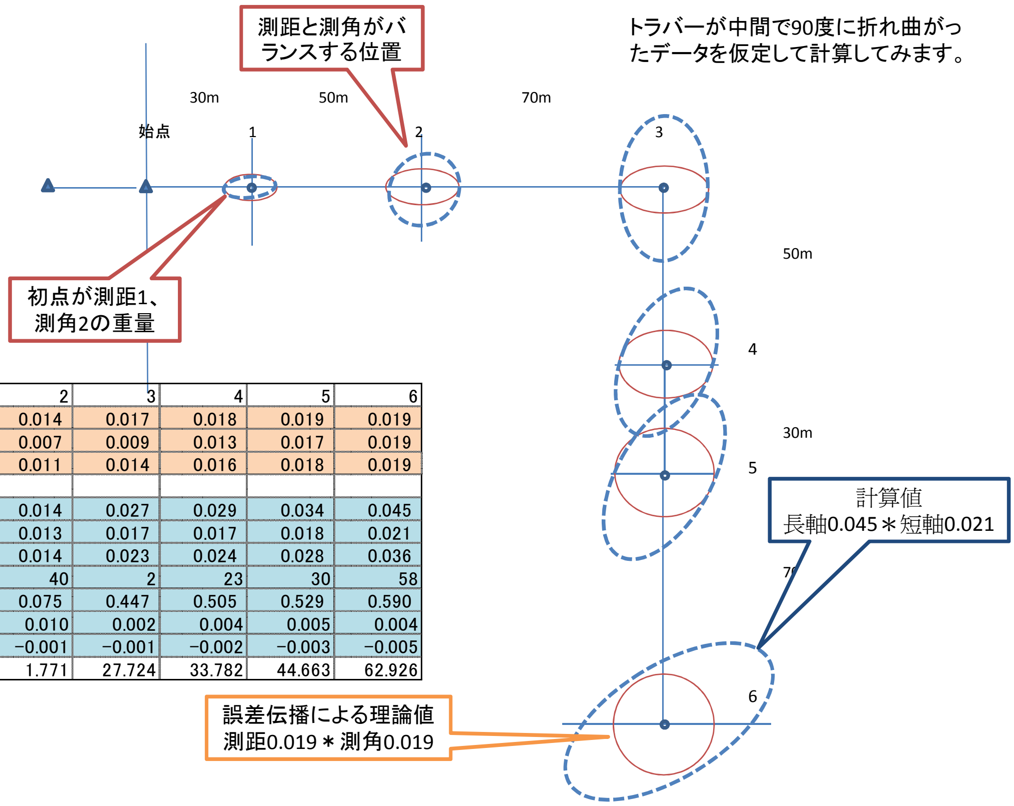




	1	2	3	4	5	6
伝播の距離理論値	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
伝播の角理論値	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
伝播のσxy	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
長軸	0.010	0.030	0.059	0.064	0.071	0.096
短軸	0.009	0.013	0.017	0.019	0.023	0.034
計算σxy	0.010	0.023	0.043	0.047	0.053	0.073
楕円角（度）	146	173	178	19	30	55
相関係数(ρ)	0.124	0.663	0.849	0.820	0.781	0.736
⊿x	0.000	−0.002	−0.004	−0.002	−0.002	−0.003
⊿y	−0.001	−0.001	−0.001	−0.005	−0.006	−0.009
不良率(%) 0.040	0.003	38.973	81.391	82.805	84.567	90.517

④ 誤差の値　直線＋90度曲がり（測距10mm・測角10secの重量）

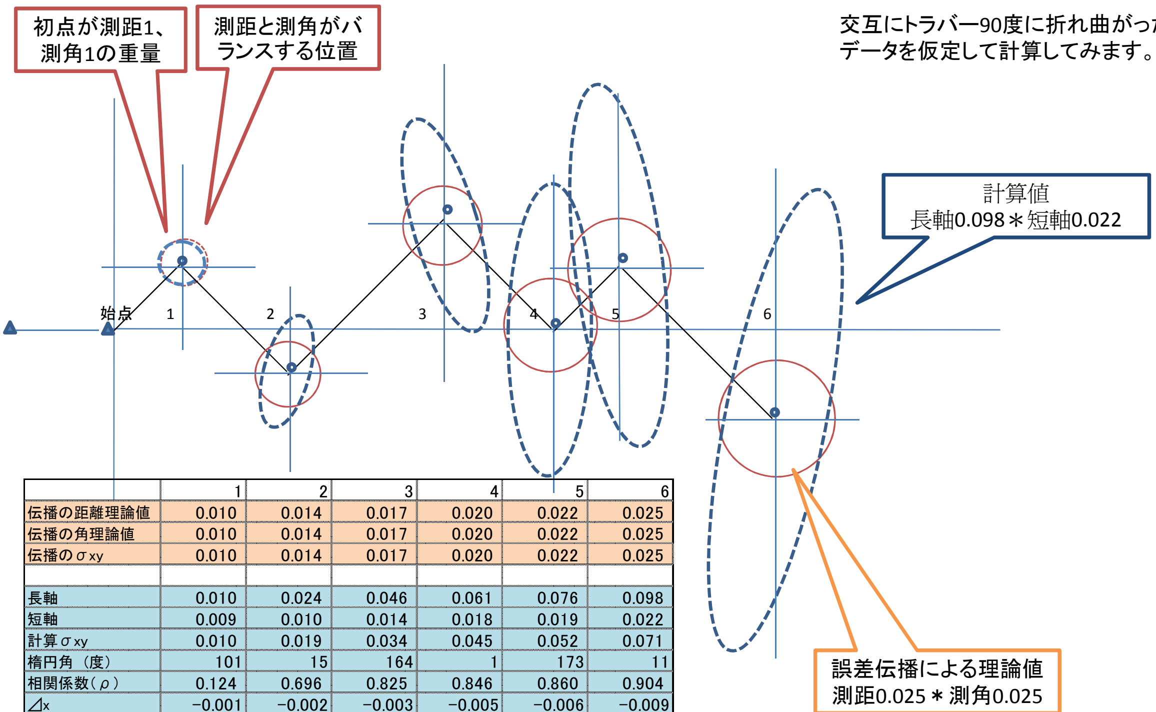
トラバーが中間で90度に折れ曲がったデータを仮定して計算してみます。



	1	2	3	4	5	6
伝播の距離理論値	0.010	0.014	0.017	0.018	0.019	0.019
伝播の角理論値	0.005	0.007	0.009	0.013	0.017	0.019
伝播のσxy	0.008	0.011	0.014	0.016	0.018	0.019
長軸	0.010	0.014	0.027	0.029	0.034	0.045
短軸	0.004	0.013	0.017	0.017	0.018	0.021
計算σxy	0.008	0.014	0.023	0.024	0.028	0.036
楕円角（度）	81	40	2	23	30	58
相関係数（ρ）	0.590	0.075	0.447	0.505	0.529	0.590
⊿x	0.001	0.010	0.002	0.004	0.005	0.004
⊿y	−0.001	−0.001	−0.001	−0.002	−0.003	−0.005
不良率(%) 0.040	0.098	1.771	27.724	33.782	44.663	62.926

⑤ 誤差の値　交互（測距10mm・測角20secの重量）

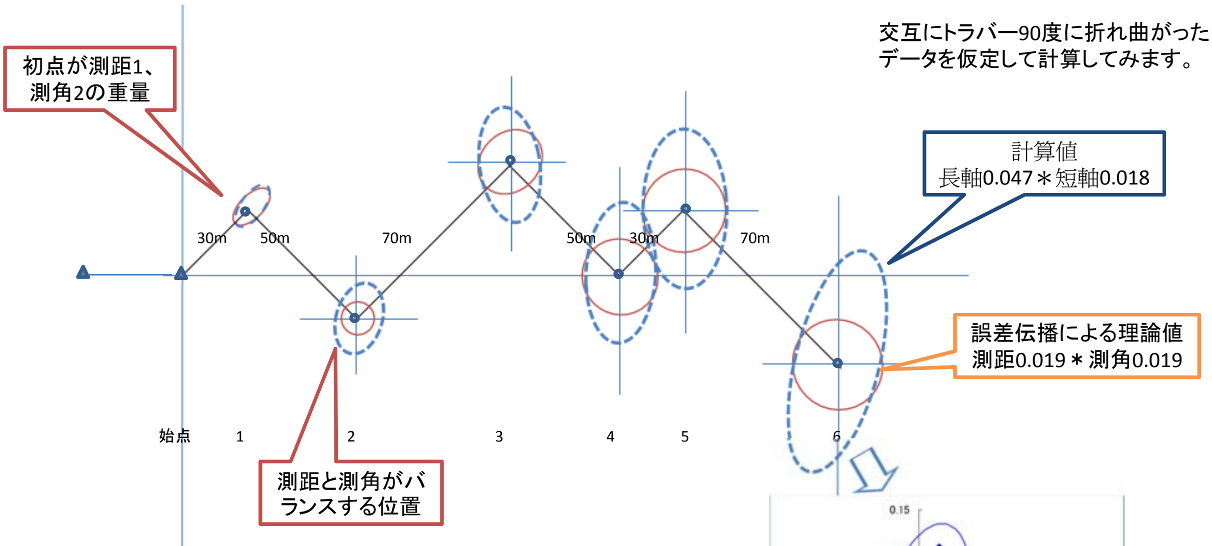
交互にトラバー90度に折れ曲がったデータを仮定して計算してみます。



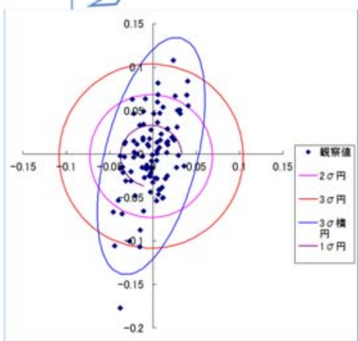
	1	2	3	4	5	6
伝播の距離理論値	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
伝播の角理論値	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
伝播のσxy	0.010	0.014	0.017	0.020	0.022	0.025
長軸	0.010	0.024	0.046	0.061	0.076	0.098
短軸	0.009	0.010	0.014	0.018	0.019	0.022
計算σxy	0.010	0.019	0.034	0.045	0.052	0.071
楕円角（度）	101	15	164	1	173	11
相関係数（ρ）	0.124	0.696	0.825	0.846	0.860	0.904
⊿x	−0.001	−0.002	−0.003	−0.005	−0.006	−0.009
⊿y	0.000	−0.001	0.001	−0.002	0.002	−0.003
不良率(%) 0.040	0.124	0.696	0.825	0.846	0.860	0.904

⑥ 誤差の値　交互（測距10mm・測角10secの重量）

交互にトラバー90度に折れ曲がった
データを仮定して計算してみます。



	1	2	3	4	5	6
伝播の距離理論値	0.010	0.007	0.015	0.016	0.018	0.019
伝播の角理論値	0.005	0.007	0.012	0.016	0.017	0.019
伝播のσxy	0.008	0.007	0.014	0.016	0.018	0.019
長軸	0.010	0.015	0.024	0.029	0.033	0.047
短軸	0.005	0.010	0.013	0.015	0.018	0.018
計算σxy	0.008	0.013	0.019	0.023	0.026	0.035
楕円角（度）	36	16	172	3	179	14
相関係数（ρ）	0.590	0.351	0.557	0.587	0.548	0.748
⊿x	0.000	0.001	0.001	0.002	0.001	−0.002
⊿y	−0.001	0.000	−0.001	−0.002	0.001	−0.002
不良率(%)0.040	0.099	1.819	22.155	35.509	41.589	68.190



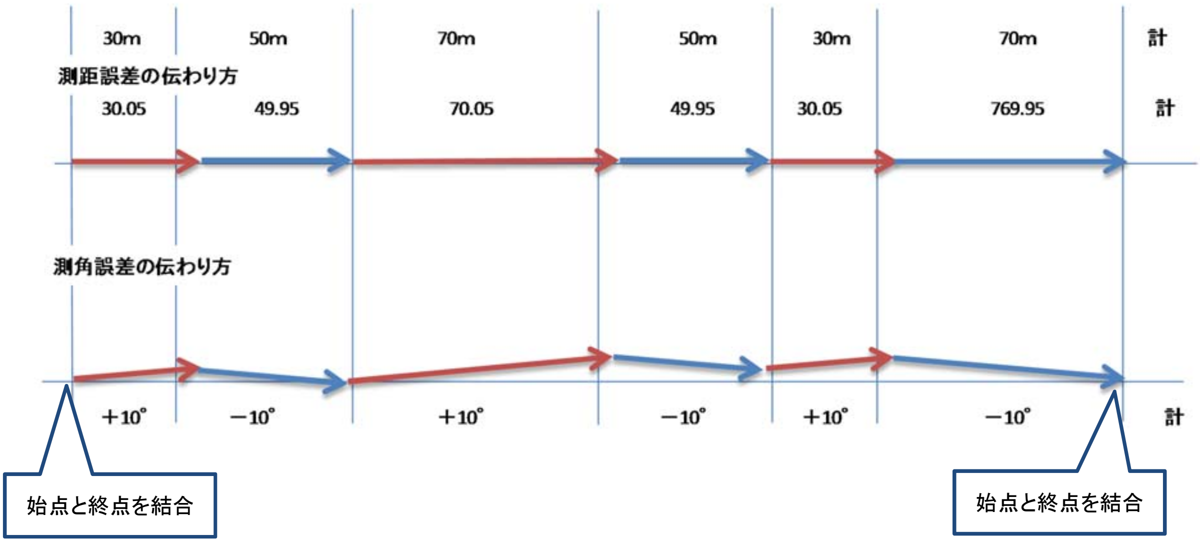
誤差伝播の検証（結合・簡易コンパス法で）その2

3通りのトラバー型を用意してコンパス法による誤差配布で計算しました、誤差配布には均等法がありますが結果はコンパス法と差が見られませんので掲載していません。
このことに関しては意外と思われる方もおられるでしょうが考えて見れば納得がいきます、今回そのことの説明はしていません。

誤差伝播の真実

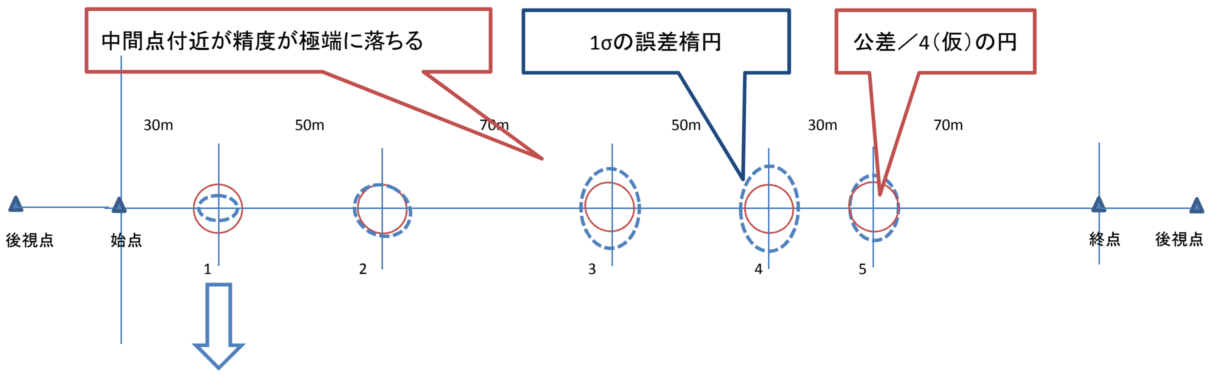
結合で角誤差を配布すると

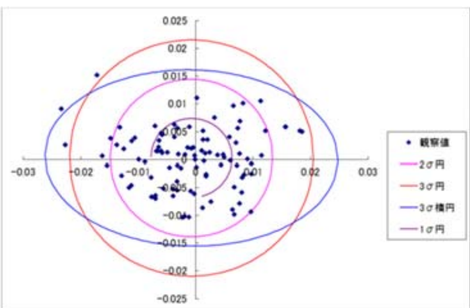
下の図で説明すれば
発生する角誤差によって計算される角誤差の⊿xが＋、－と交互に表れるとxの値は0、⊿x･･･を繰り返し、終点で0となる。
しかし、各点での誤差は計算上も0とはならない。



混合測量では誤差伝播の法則はない
各点の誤差の出方はこの後解析いたします

②　誤差の値　直線（測距10mm・測角20secの重量）コンパス法

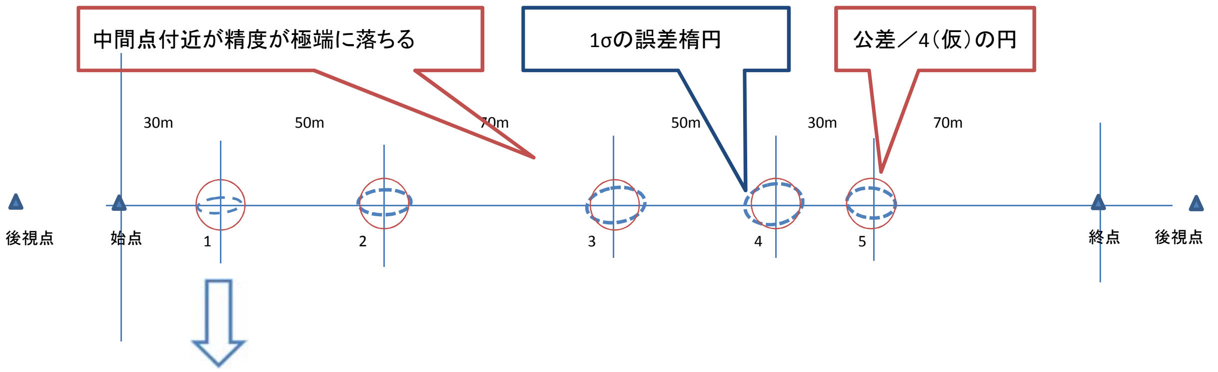


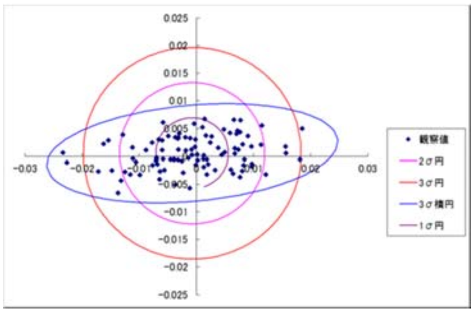


	1	2	3	4	5
伝播の距離理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播の角理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播のσxy	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
長軸	0.008	0.012	0.016	0.017	0.013
短軸	0.005	0.010	0.012	0.012	0.010
計算σxy	0.007	0.011	0.014	0.015	0.011
楕円角（度）	91	117	179	1	178
相関係数（ρ）	0.444	0.136	0.293	0.385	0.212
⊿x	0.000	0.001	0.001	−0.001	0.000
⊿y	−0.010	−0.001	0.000	−0.001	−0.002
不良率(%)0.040	0.003	0.171	2.431	5.131	0.361

測角誤差は測距誤差のN点倍ありこれを角誤差として均等配布し測角誤差をコンパス法で配布している。
結局誤差は距離に比例して配布されている訳でなくほとんど、誤差の7分の6は均等にはいふされる。

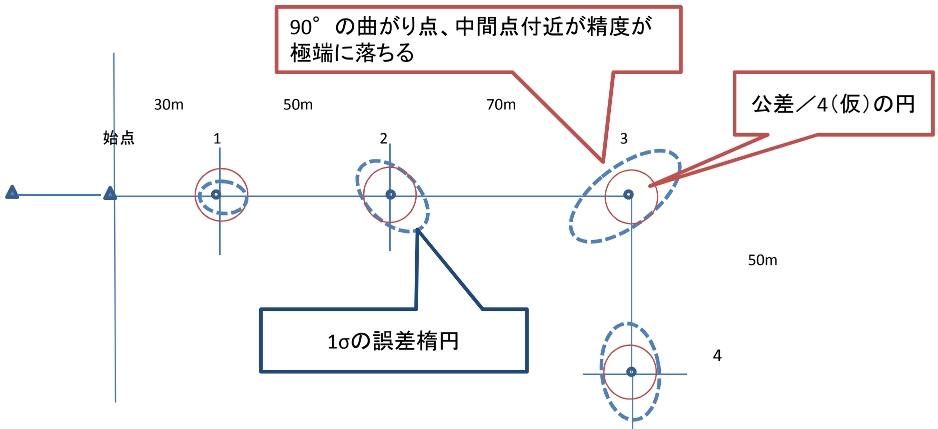
① 誤差の値　直線（測距10mm・測角10secの重量）コンパス法



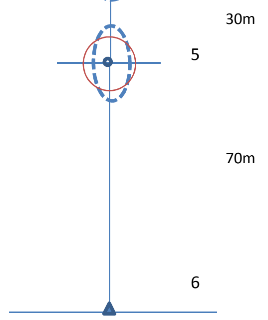


	1	2	3	4	5
伝播の距離理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播の角理論値	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
伝播のσxy	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008
長軸	0.009	0.011	0.012	0.012	0.010
短軸	0.003	0.005	0.007	0.008	0.006
計算σxy	0.006	0.009	0.010	0.010	0.008
楕円角（度）	85	88	82	80	95
相関係数（ρ）	0.796	0.625	0.323	0.266	0.425
⊿x	0.001	0.001	0.002	0.002	0.001
⊿y	−0.001	−0.001	0.000	−0.001	−0.002
不良率(%)0.040	0.484	0.734	0.186	0.171	0.047

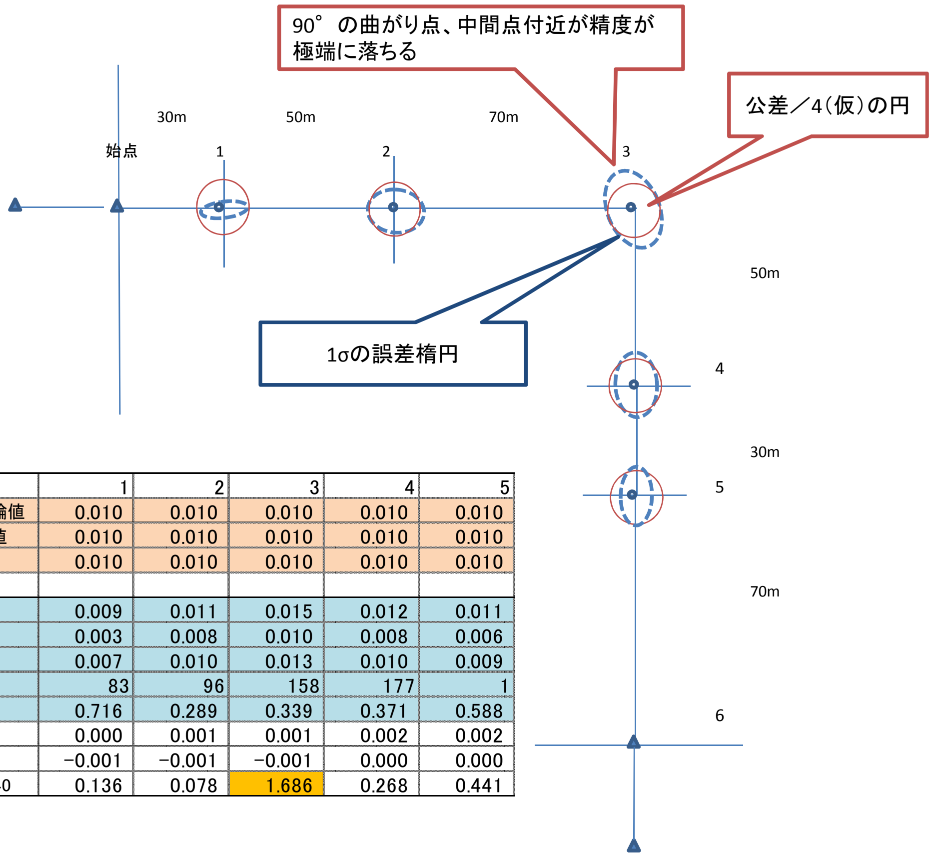
③ 誤差の値　直線＋90度曲がり（測距10mm・測角20secの重量）コンパス法



	1	2	3	4	5
伝播の距離理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播の角理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播のσxy	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
長軸	0.009	0.016	0.025	0.018	0.014
短軸	0.006	0.010	0.011	0.011	0.007
計算σxy	0.008	0.013	0.020	0.015	0.011
楕円角（度）	96	135	53	174	179
相関係数（ρ）	0.440	0.409	0.660	0.447	0.554
⊿x	−0.002	−0.001	−0.002	0.000	0.001
⊿y	−0.001	0.000	0.001	0.000	0.000
不良率(%)0.040	12.373	3.025	28.480	5.751	1.900

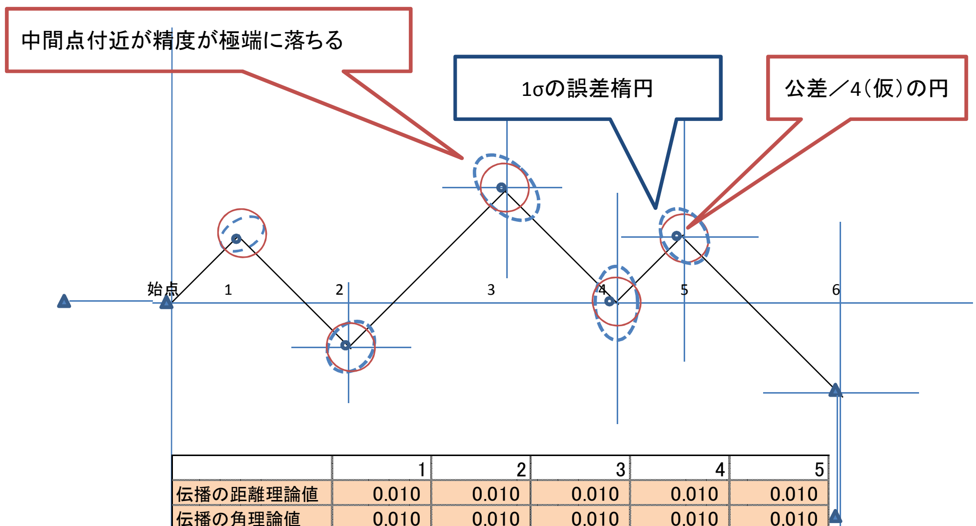


④ 誤差の値　直線＋90度曲がり（測距10mm・測角10secの重量）コンパス法



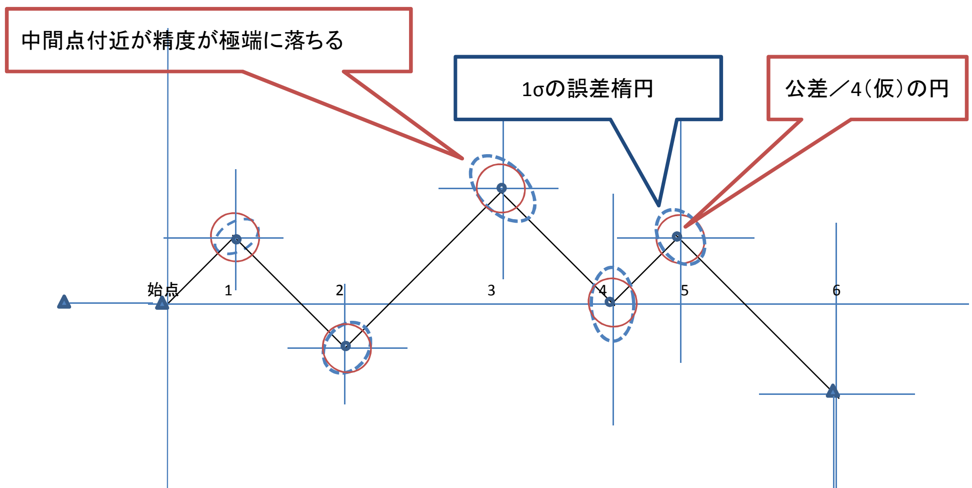
	1	2	3	4	5
伝播の距離理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播の角理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播のσxy	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
長軸	0.009	0.011	0.015	0.012	0.011
短軸	0.003	0.008	0.010	0.008	0.006
計算σxy	0.007	0.010	0.013	0.010	0.009
楕円角（度）	83	96	158	177	1
相関係数(ρ)	0.716	0.289	0.339	0.371	0.588
⊿x	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002
⊿y	−0.001	−0.001	−0.001	0.000	0.000
不良率(%)0.040	0.136	0.078	1.686	0.268	0.441

⑤ 誤差の予想値　交互（測距10mm・測角20secの重量）コンパス法



	1	2	3	4	5
伝播の距離理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播の角理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播のσxy	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
長軸	0.010	0.011	0.016	0.015	0.012
短軸	0.006	0.009	0.010	0.009	0.009
計算σxy	0.008	0.010	0.013	0.012	0.010
楕円角（度）	60	37	136	179	146
相関係数(ρ)	0.424	0.128	0.406	0.445	0.303
⊿x	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001
⊿y	0.000	0.000	0.002	−0.001	0.002
不良率(%)0.040	0.025	0.064	2.878	2.315	0.217

⑥ 誤差の値　交互（測距10mm・測角10secの重量）コンパス法



	1	2	3	4	5
伝播の距離理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播の角理論値	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
伝播のσxy	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
長軸	0.009	0.010	0.012	0.011	0.010
短軸	0.004	0.009	0.010	0.008	0.006
計算σxy	0.007	0.009	0.011	0.010	0.008
楕円角（度）	39	45	162	178	136
相関係数（ρ）	0.674	0.066	0.193	0.301	0.454
⊿x	0.000	0.000	0.002	0.002	0.002
⊿y	-0.001	0.000	-0.001	-0.001	0.002
不良率(%)0.040	0.071	0.011	0.218	0.145	0.057

コメント

トラバー測量では誤差伝播の法則はない。

直線的トラバーで見ると測角誤差は測距誤差のN点倍ありこれを角誤差として均等配布し測角誤差をコンパス法で配布している。
結局誤差は距離に比例して配布されている訳でなくほとんどの誤差の7分の6は均等に配布される。

誤差の配布は厳密網計算の場合、より均等に配布される傾向にある、これはMtが13.5秒と大きく設定ある為です（未確認）。

既設の多角点3点を使って問題ないか点検する場合には実測値と成果が近い判断基準が求められるわけです、誤差が距離に比例して配布していないので基準に距離を引用した数値を持て来るのは可笑しいのです。

東京土地家屋調査士会の基準点PTは距離を引用した基準を提唱しているがこれは間違いであり、測量学上無知を対外的に見せているのと同じ・・・・恥ずかしい限りです。
！！！！誰もそんな基準は使ってないって？？？か