誤差楕円と標準誤差曲線

二変量の誤差の概要

はじめに，測量の観測値は基本的に，角度と距離からできています，実際は１～２回観測（測定）を行いその平均値を１回のデータとして完了します，一般的な誤差の説明ではある点間を数十回測ったデータとして説明されますので，これでは測量データでは馴染まないことになります。

境界測量では同一点を複数回測る事はありませんので誤差論から説明される誤差と境界測量成果に対する誤差とではニュアンスが異なります，ある一団の境界点を異なる次元によって測量し得られた点毎の成果との差を誤差として扱うのが境界（筆界）の誤差です。

例えば，１０年前の成果をＡデータとすれば，各点のデータは AXi（i=1～n 個），AYi で表示し，現在の成果をＢデータとすれば各点のデータは BXi，BYi となり，各点の誤差は Xi= BXi－AXi，Yi= BYi－AYi となります。

AXi，AYi と BXi，BYi は与点（基準の基とする点）が異なる場合，あるいは同じ与点であっても精度が良くない場合は BXi，BYi を基準に AXi，AYi を変換してから誤差を求める必要があります，変換には図形の回転，移動，伸縮がある場合，回転，移動，伸縮＋歪みがある場合とがあります，これについては座標変換で学習してください。

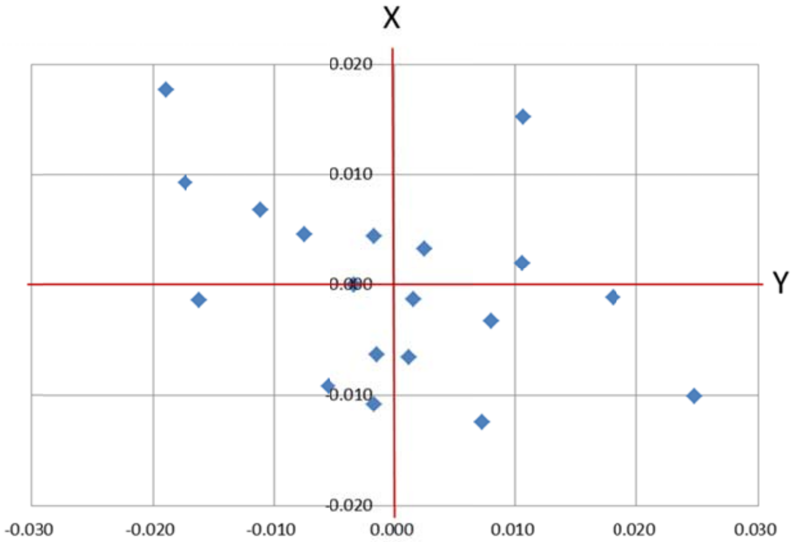
標準誤差曲線

次の表，変換後の A データは旧の成果を準拠点（基準にする点）にヘルマート変換した値，現在の B データは実測した値です。

	変換後のAデータ			現在のBデータ			BX−AX	BY－AY
番号	点名	AX	AY	点名	BX	BY	X	Y
1	hK3	−424.169	189.853	G3	−424.172	189.861	−0.003	0.008
2	hK4	−435.963	188.077	G4	−435.973	188.102	−0.010	0.025
3	hK5	−446.674	187.542	G5	−446.672	187.553	0.002	0.011
4	hK6	−454.074	199.197	G6	−454.059	199.208	0.015	0.011
5	hK7	−455.496	205.678	G7	−455.497	205.662	−0.001	−0.016
6	hK8	−459.615	216.081	G8	−459.616	216.083	−0.001	0.002
7	hK9	−460.533	219.118	G9	−460.540	219.119	−0.007	0.001
8	hK10	−456.201	221.128	G10	−456.210	221.123	−0.009	−0.005
9	hK11	−449.475	224.182	G11	−449.476	224.200	−0.001	0.018
10	hK12	−445.800	225.529	G12	−445.796	225.527	0.004	−0.002
11	hK13	−444.819	225.836	G13	−444.816	225.838	0.003	0.002
12	hK14	−442.284	226.408	G14	−442.284	226.405	0.000	−0.003
13	hK15	−440.345	226.612	G15	−440.338	226.601	0.007	−0.011
14	hK16	−436.488	225.316	G16	−436.483	225.308	0.005	−0.008
16	hK18	−430.272	213.171	G18	−430.285	213.178	−0.013	0.007
17	hK19	−427.734	201.595	G19	−427.740	201.594	−0.006	−0.001
18	hK20	−423.927	193.789	G20	−423.918	193.772	0.009	−0.017
19	hK21	−423.895	189.893	G21	−423.877	189.874	0.018	−0.019
21	hK23	−458.731	219.954	G23	−458.742	219.952	−0.011	−0.002
						平均	0.000	0.000
						標準偏差	0.008	0.012

座標データ表

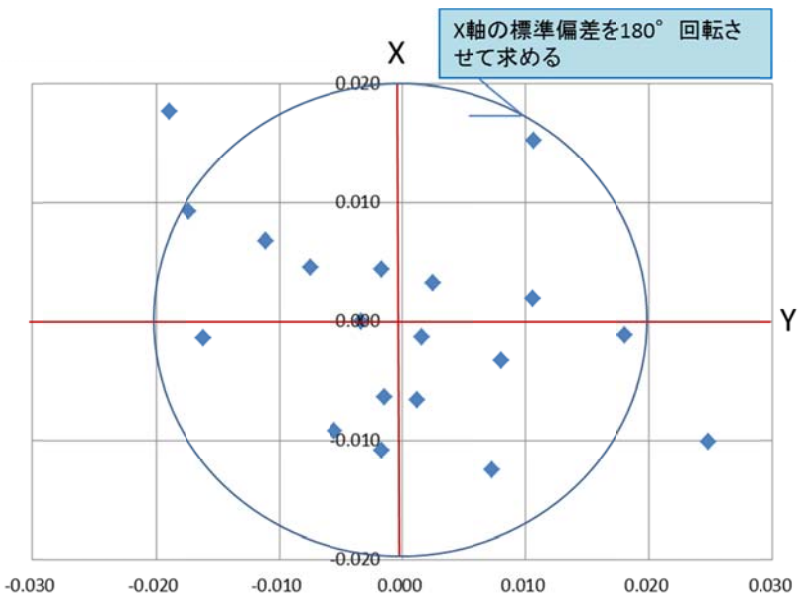
Xi，Yi を表の右側の通り求め，散布図に作成したのが下の図です。



X，Y 散布図

X 軸の標準偏差を計算

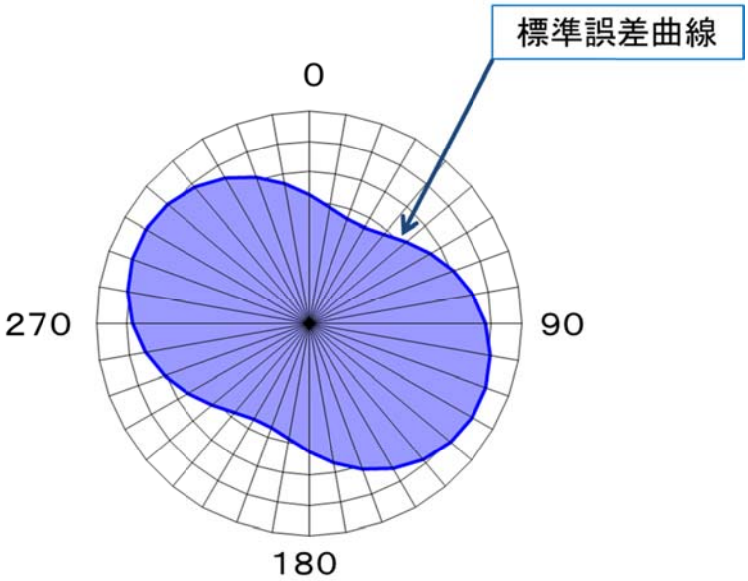
はじめに x 軸の標準偏差を計算し，この軸から１０°毎に１８０°まで標準偏差を計算します。



次の表が１０°毎の標準偏差の計算結果です。

標準偏差	角度
0.008462	0
0.007740	10
0.007312	20
0.007283	30
0.007663	40
0.008354	50
0.009215	60
0.010114	70
0.010946	80
0.011634	90
0.012127	100
0.012390	110
0.012406	120
0.012175	130
0.011712	140
0.011047	150
0.010231	160
0.009335	170

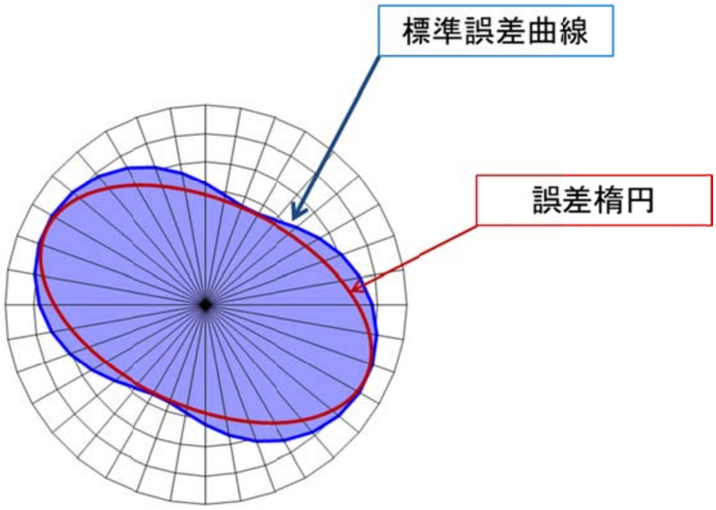
この結果を散布図にプロットし結線したのが標準誤差曲線です。



標準誤差曲線図

誤差楕円

この標準誤差曲線自体はこれと言う使い道はありませんがこれが二変量の誤差を表示した基本的なグラフだということです。



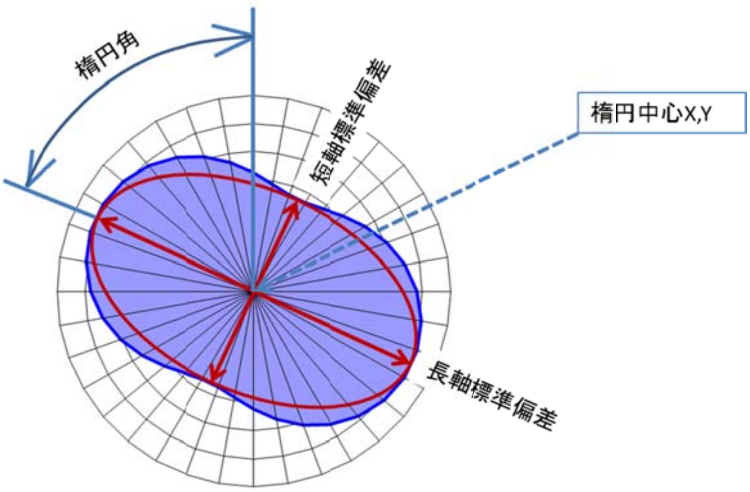
誤差楕円

標準誤差曲線の内側に接する楕円を作成しますと図の赤線の楕円になります。これが誤差楕円というもので，誤差楕円が二変量の分布で重要な値になります。

誤差楕円は楕円の中心点，楕円長軸長，楕円短軸長，楕円の傾きの４つの要素からなります。

次の図に示す通り，この４つの要素が二変量いわゆる座標値データの誤差に関する重要な指標になります。

標準偏差の計算結果の表の最大値の角度が１２０°付近に長軸があります。



それぞれの要素の計算式を次に示します。

楕円の中心点は「座標データ表」の Xi，Yi の平均値$\bar{x}$，$\bar{y}$　です。

$$\bar{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}(\mathrm{Xi})$$

$$\bar{\mathrm{Y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Yi})$$

x 軸標準偏差σ_{x}

$$\sigma_{\mathrm{x}}{}^{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Xi} - \bar{\mathrm{X}})^{2}$$

y 軸標準偏差σ_{y}

$$\sigma_{\mathrm{y}}{}^{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Yi} - \bar{\mathrm{Y}})^{2}$$

標準偏差σ_{xy}

$$\sigma_{\mathrm{xy}}{}^{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Xi} - \bar{\mathrm{X}})(\mathrm{Yi} - \bar{\mathrm{Y}})$$

$$\sigma_{\mathrm{xy}} = \sqrt{\sigma_{\mathrm{xy}}{}^{2}}$$

長軸標準偏差σ_{m}

$$\sigma_{\mathrm{m}}{}^{2} = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}{}^{2} + \sigma_{\mathrm{y}}{}^{2} + \sqrt{\left(\sigma_{\mathrm{x}}{}^{2} - \sigma_{\mathrm{y}}{}^{2}\right) + 4\sigma_{\mathrm{xy}}{}^{2}}}{2}$$

短軸標準偏差σ_{n}

$$\sigma_{\mathrm{n}}{}^{2} = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}{}^{2} + \sigma_{\mathrm{y}}{}^{2} - \sqrt{\left(\sigma_{\mathrm{x}}{}^{2} - \sigma_{\mathrm{y}}{}^{2}\right) + 4\sigma_{\mathrm{xy}}{}^{2}}}{2}$$

楕円角α

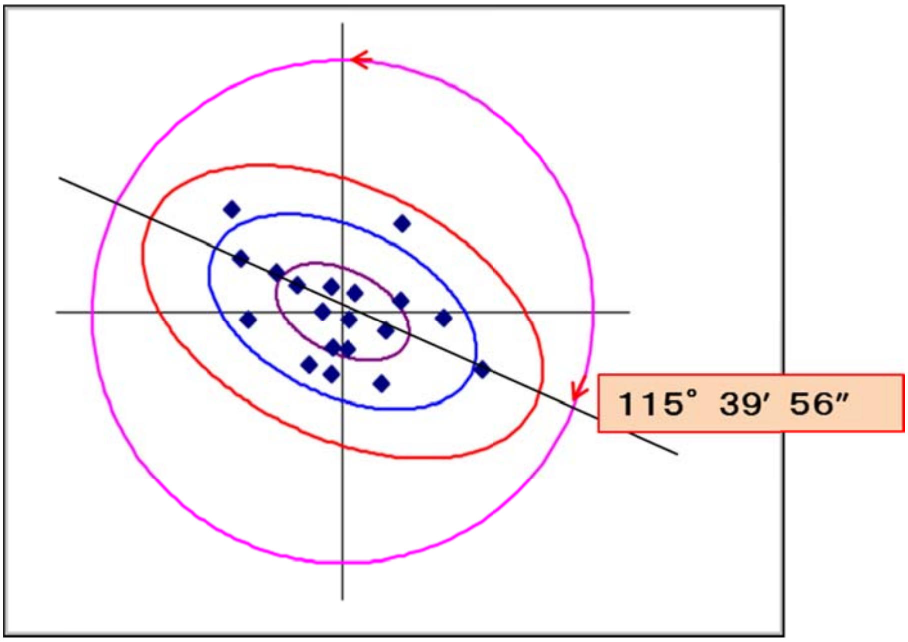
$$\tan\alpha = \frac{\sigma_{\mathrm{m}}{}^{2} - \sigma_{\mathrm{n}}{}^{2}}{\sigma_{\mathrm{xy}}}$$

式をエクセルで計算すると次の表になります。

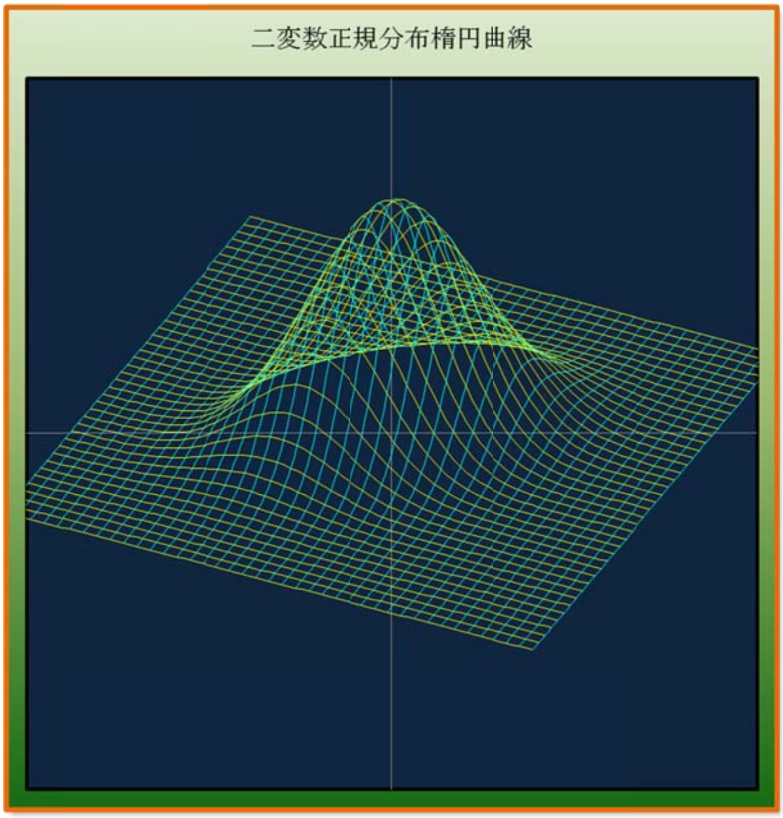
		分布中心				lam1	lam2					
σm	σn	Xav	Yav	相関係数		0.0001464	4.97E-05					
0.01210	0.00705	0.0000	0.0000	-0.449		a	b					
σx	σy					0.9013382	0.4331161					
0.0082	0.0113				標準偏差(無相	slope	回転角度	生角	図の角度			
	カウント		σ		0.010	-2.081054	-25.66548	115.6655	90.0000			
	19		0.0099		sx=sx/n	sy=sy/n	sxy=sxy/n			角判定	σx	σy
					0.000068	0.000128	-0.000038			OK	0.0071	0.0121
NO,	点名	⊿X	⊿Y	ベクトル	sx	sy	sxy	⊿⊿x	⊿⊿y	生角+回転	Δxh	Δyh
1	1	0.003	-0.008	0.008666	0.000011	0.000064	-0.000027	0.000	0.009	266.786	0.000	-0.009
2	2	0.010	-0.025	0.026744	0.000102	0.000614	-0.000250	0.002	0.027	266.465	-0.002	-0.027
3	3	-0.002	-0.011	0.010730	0.000004	0.000111	0.000020	0.006	0.009	234.031	-0.006	-0.009
4	4	-0.015	-0.011	0.018563	0.000231	0.000114	0.000162	0.018	0.003	189.426	-0.018	-0.003
5	5	0.001	0.016	0.016125	0.000002	0.000258	0.000023	0.008	0.014	59.170	0.008	0.014
6	6	0.001	-0.002	0.002036	0.000002	0.000002	-0.000002	0.001	0.002	284.737	0.001	-0.002
7	7	0.007	-0.001	0.006702	0.000044	0.000001	-0.000008	0.005	0.004	324.208	0.005	-0.004
8	8	0.009	0.005	0.010721	0.000085	0.000030	0.000051	0.011	0.001	5.109	0.011	0.001
9	9	0.001	-0.018	0.018079	0.000001	0.000326	-0.000021	0.007	0.017	248.001	-0.007	-0.017
10	10	-0.004	0.002	0.004664	0.000019	0.000003	-0.000007	0.003	0.003	133.719	-0.003	0.003
11	11	-0.003	-0.002	0.004063	0.000011	0.000006	0.000008	0.004	0.001	191.358	-0.004	-0.001
12	12	0.000	0.003	0.003304	0.000000	0.000011	0.000000	0.001	0.003	63.575	0.001	0.003
13	13	-0.007	0.011	0.012993	0.000046	0.000123	-0.000075	0.001	0.013	95.705	-0.001	0.013
14	14	-0.005	0.008	0.008811	0.000021	0.000057	-0.000034	0.001	0.009	95.664	-0.001	0.009
15	15	0.013	-0.007	0.014480	0.000157	0.000053	-0.000091	0.008	0.012	304.233	0.008	-0.012
16	16	0.006	0.001	0.006542	0.000041	0.000002	0.000009	0.006	0.001	346.977	0.006	-0.001
17	17	-0.009	0.017	0.019601	0.000085	0.000299	-0.000159	0.001	0.020	92.346	-0.001	0.020
18	18	-0.018	0.019	0.025913	0.000312	0.000360	-0.000335	0.008	0.025	107.301	-0.008	0.025
19	19	0.011	0.002	0.010983	0.000118	0.000003	0.000018	0.011	0.003	343.143	0.011	-0.003

表中の生角１１５．６６５５（１１５°３９′５６″）が誤差楕円の長軸の角度になります。

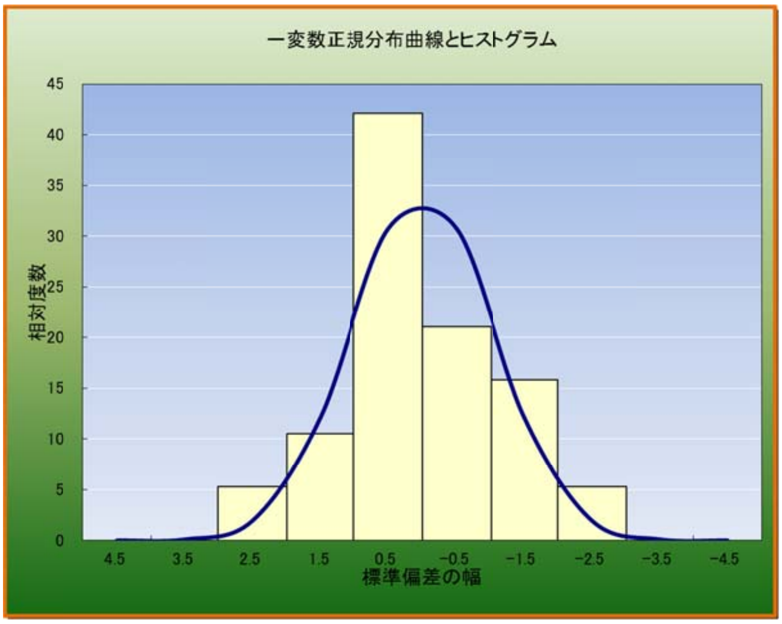
分布中心Y	分布中心X	楕円角
0.000	0.000	115.6655
		115°39′56″



誤差楕円（内側から１σ，２σ，３σ）で４．２５σ円になります。
ここまでは標準誤差曲線と誤差楕円の概略です。



二変量（二変数）の密度関数グラフは上図のようになります。楕円の潰れ具合を相関係数で表示します，これについては別の項で説明します。



長軸から見た時のヒストグラム（度数グラフ）です，青線が一変量（一変数）の正規分布曲線で理想的に近い分布になっています。

私的に座標の誤差は本当に正規分布の形をしているのです，不思議ですが。

たかが１９個のデータでもこのように綺麗な分布になるんですね。
今日はここまで

２０１６／０４／０８作成
土地家屋調査士・測量士　小野孝治